

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ ผลคูณเชิงสเกลาร์ เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์
2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

การคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ มีบทนิยามต่อไปนี้

ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3

เป็นสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ \vec{u} และ \vec{v} เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$

กำหนดดังนี้

1. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ
จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2$
2. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ได้

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ มีดังนี้

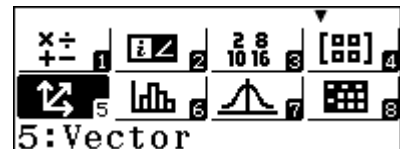
ให้ \vec{u}, \vec{v} และ \vec{w} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์จะได้ว่า

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ และ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$
3. $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
4. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
6. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ และ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

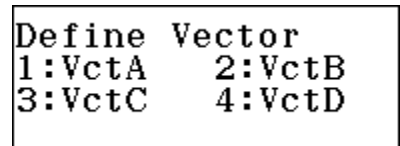
กระบวนการจัดการเรียนรู้

- ครูทบทวนความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้
 - ผลคูณเชิงสเกลาร์ มีนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร
 - ให้นักเรียนยกตัวอย่างการหาผลคูณเชิงสเกลาร์
- นักเรียนและครูสรุปนิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ทั้งระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ โดยเมื่อกำหนดเวกเตอร์ดังนี้
 - ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2$
 - ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์
- ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม จำนวน 5 กลุ่ม โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่า $\vec{A} \cdot \vec{B}$ เมื่อกำหนด $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ และ $\vec{B} = 4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

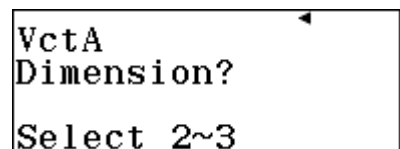
4.1 กดปุ่ม **MENU**



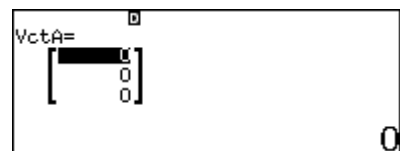
4.2 กดปุ่ม **5** เพื่อเมนู 5:Vector



4.3 กำหนดค่า \vec{A} โดยกดปุ่ม **1**

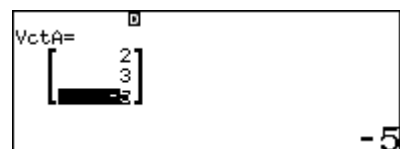


4.4 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม **3**

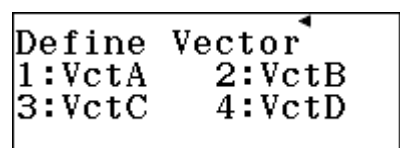


4.5 ป้อนค่า $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ โดยกดปุ่ม

2 = 3 = (-) 5 =



4.6 จากนั้นกำหนด \vec{B} กดปุ่ม **OPTN 1**



4.7 กำหนดมิติของ \vec{B} โดยกดปุ่ม **[2]**

VctB
Dimension?
Select 2~3

4.8 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม **[3]**

VctB=
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4.9 ป้อนค่า $\vec{B} = 4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ โดยกดปุ่ม

[4] [=] [-] [1] [=] [6] [=]

VctB=
 $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

4.10 เตรียมคำนวณผลคูณเวกเตอร์ โดยกดปุ่ม **[AC]**

Vector

4.11 นำ \vec{A} ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม **[OPTN]**

1:Define Vector
2>Edit Vector
3:VctA 4:VctB
5:VctC 6:VctD

4.12 นำ \vec{A} ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม **[3]**

VctA

4.13 ป้อนเครื่องหมายคูณแบบสเกลาร์ (Dot) โดยกดปุ่ม **[OPTN]**

1:Define Vector
2>Edit Vector
3:VctA 4:VctB
5:VctC 6:VctD

4.14 กดปุ่ม **[▽]**

1:VctAns
2:Dot Product
3:Angle
4:Unit Vector

4.15 เลือก 2: Dot Product โดยกดปุ่ม **[2]**

VctA•

4.16 นำ \vec{B} ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม **[OPTN] [4]**

VctA•VctB

4.17 คำนวณผลคูณของ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ โดยกดปุ่ม **[=]**

VctA•VctB
-25

5. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่า

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) \text{ เมื่อกำหนด } \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} \text{ และ } \vec{B} = 4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k} \text{ และ}$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} \text{ โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้}$$

5.1 กำหนดค่า \vec{C} เพิ่มขึ้น โดยกดปุ่ม **OPTN** **1** **3**

VctC
Dimension?
Select 2~3

5.2 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม **3**

VctC=
[0
0
0]

5.3 ป้อนค่า $\vec{C} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$ โดยกดปุ่ม

3 **=** **6** **=** **4** **=**

VctC=
[3
6
4]

5.4 เตรียมคำนวณผลคูณเวกเตอร์ โดยกดปุ่ม **AC**

Vector

5.5 คำนวณค่า $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$ ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม

OPTN **3** **OPTN** **▼** **2** **(** **OPTN**
4 **+** **OPTN** **5** **)** **=**

VctA · (VctB+VctC)
-21

6. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่า $|\vec{A}|^2$
โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

6.1 เตรียมคำนวณเวกเตอร์ โดยกดปุ่ม **AC**

Vector

6.2 คำนวณค่า $|\vec{A}|^2$ โดยกดปุ่ม

SHIFT **(** เพื่อเลือกคำสั่ง Abslute

จากนั้นกด **OPTN** **3** **)** **x²** **=**

Abs(VctA)²
38

7. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1.1- 1.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปรายหาความสัมพันธ์ (ขั้นสำรวจ
และหาความสัมพันธ์)

8. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปรายผล เพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์ซึ่งจะได้ว่า

$$\text{ใบกิจกรรมที่ 1.1 จะได้ว่า } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\text{ใบกิจกรรมที่ 1.2 จะได้ว่า } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$$

$$\text{ใบกิจกรรมที่ 1.3 จะได้ว่า } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$$

ใบกิจกรรมที่ 1.4 จะได้ว่า $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$

ใบกิจกรรมที่ 1.5 จะได้ว่า 1) $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

$$2) \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$3) \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$4) \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

9. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่ได้จากการได้สำรวจ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

ให้ \vec{u} , \vec{v} และ \vec{w} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \text{ และ } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})$$

$$3. a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$$

$$4. \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$$

$$5. \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$6. \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \text{ และ } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

10. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์ โดยไม่ใช่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ขั้นฝึกทักษะ)

สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 1.1 – 1.5 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1.1- 1.5
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1.1

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ตอนที่ 1 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{A} \cdot \vec{B} =$	$\vec{B} \cdot \vec{A} =$
2	$\vec{B} \cdot \vec{C} =$	$\vec{C} \cdot \vec{B} =$
3	$\vec{C} \cdot \vec{D} =$	$\vec{D} \cdot \vec{C} =$
4	$\vec{D} \cdot \vec{A} =$	$\vec{A} \cdot \vec{D} =$

ตอนที่ 2 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{A} \cdot \vec{B} =$	$\vec{B} \cdot \vec{A} =$
2	$\vec{B} \cdot \vec{C} =$	$\vec{C} \cdot \vec{B} =$
3	$\vec{C} \cdot \vec{D} =$	$\vec{D} \cdot \vec{C} =$
4	$\vec{D} \cdot \vec{A} =$	$\vec{A} \cdot \vec{D} =$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า a, b, c, d, e, f เป็นสเกลาร์ และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ และ \vec{D} เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\vec{A} \cdot \vec{B} = \dots\dots\dots$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = \dots\dots\dots$$

ใบกิจกรรมที่ 1.2

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ตอนที่ 1 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) =$	$(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C}) =$
2	$\vec{B} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) =$	$(\vec{B} \cdot \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{D}) =$
3	$\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) =$	$\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) =$
4	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right) =$	$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right) =$

ตอนที่ 2 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) =$	$(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C}) =$
2	$\vec{B} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) =$	$(\vec{B} \cdot \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{D}) =$
3	$\vec{C} \cdot (\vec{D} + \vec{A}) =$	$(\vec{C} \cdot \vec{D}) + (\vec{C} \cdot \vec{A}) =$
4	$\vec{D} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) =$	$(\vec{D} \cdot \vec{A}) + (\vec{D} \cdot \vec{B}) =$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ และ \vec{D} เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \dots\dots\dots$

$\vec{B} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 1.3

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ตอนที่ 1 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (เหมือนตอนที่ 2 ใบกิจกรรมที่ 1.2)

หมายเหตุ หากนักเรียนเคยสร้างไว้ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์แล้ว ไม่จำเป็นต้องสร้างใหม่

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} =$	$(\vec{A} \cdot \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{C}) =$
2	$(\vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{D} =$	$(\vec{B} \cdot \vec{D}) + (\vec{C} \cdot \vec{D}) =$
3	$(\vec{C} + \vec{D}) \cdot \vec{A} =$	$(\vec{C} \cdot \vec{A}) + (\vec{D} \cdot \vec{A}) =$
4	$(\vec{D} + \vec{A}) \cdot \vec{B} =$	$(\vec{D} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{B}) =$

ตอนที่ 2 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} =$	$(\vec{A} \cdot \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{C}) =$
2	$(\vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{D} =$	$(\vec{B} \cdot \vec{D}) + (\vec{C} \cdot \vec{D}) =$
3	$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} =$	$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}\right) =$
4	$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$	$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) =$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ และ \vec{D} เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \dots\dots\dots$

$(\vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{D} = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 1.4

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
1	$4(\vec{A} \cdot \vec{B}) =$	$(4\vec{A}) \cdot \vec{B} =$	$\vec{A} \cdot (4\vec{B}) =$
2	$(-5)(\vec{B} \cdot \vec{A}) =$	$((-5)\vec{B}) \cdot \vec{A} =$	$\vec{B} \cdot ((-5)\vec{A}) =$
3	$\frac{3}{4}(\vec{A} \cdot \vec{B}) =$	$\left(\frac{3}{4}(\vec{A})\right) \cdot \vec{B} =$	$\vec{A} \cdot \left(\frac{3}{4}(\vec{B})\right) =$
4	$0.4(\vec{B} \cdot \vec{A}) =$	$(0.4\vec{B}) \cdot \vec{A} =$	$\vec{B} \cdot (0.4\vec{A}) =$
5	$3(\vec{C} \cdot \vec{D}) =$	$(3\vec{C}) \cdot \vec{D} =$	$\vec{C} \cdot (3\vec{D}) =$
6	$(-2)(\vec{D} \cdot \vec{B}) =$	$((-2)\vec{D}) \cdot \vec{B} =$	$\vec{D} \cdot ((-2)\vec{B}) =$
7	$\frac{1}{2}(\vec{C} \cdot \vec{D}) =$	$\left(\frac{1}{2}(\vec{C})\right) \cdot \vec{D} =$	$\vec{C} \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{D})\right) =$
8	$0.9(\vec{D} \cdot \vec{C}) =$	$(0.9\vec{D}) \cdot \vec{C} =$	$\vec{D} \cdot (0.9\vec{C}) =$

จากกรณีที่ 1 กรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 พบว่า ถ้า a, b, c, d, e, f, g เป็นสเกลาร์ และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$e\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \left(\square \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\square \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}\right)$$

$$g\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}\right) = \left(\square \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\square \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $a(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\square\square) \cdot \square = \square \cdot (\square\square)$

$$a(\vec{C} \cdot \vec{D}) = (\square\square) \cdot \square = \square \cdot (\square\square)$$

ใบกิจกรรมที่ 1.5

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ตอนที่ 1 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

ข้อ		ข้อ	
1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} =$	2	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$	4	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$
5	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} =$	6	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$

กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ข้อ		ข้อ	
7	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} =$	8	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$
9	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$	10	$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$
11	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$	12	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$

จากข้อ 1 - 12 พบว่า ถ้า a,b,c เป็นสเกลาร์ และ \vec{A} เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \dots\dots\dots \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \vec{0} \cdot \vec{A} = \dots\dots\dots$$

ตอนที่ 2 กำหนด $\vec{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
13	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} =$	$\left \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right ^2 =$
14	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$	$\left \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right ^2 =$
15	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$	$\left \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right ^2 =$
16	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} =$	$\left \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right ^2 =$

จากข้อ 13 - 16

กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า a, b, c เป็นสเกลาร์ และ \vec{A} เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left| \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \right|^2 \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \left| \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \right|^2$$

ดังนั้น $\vec{A} \cdot \vec{A} = \dots\dots\dots$

ตอนที่ 3

ข้อ		ข้อ	
17	$\vec{i} \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$	18	$\vec{j} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$
19	$\vec{i} \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$	20	$\vec{j} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$
21	$\vec{k} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$		

จากข้อ 17 - 21 สรุปได้ว่า

ข้อ		ข้อ	
22	$\vec{i} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$	23	$\vec{i} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$
24	$\vec{i} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$	25	$\vec{j} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$
จากข้อ 22 – 25 สรุปได้ว่า			

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงสเกลาร์

คำชี้แจง ถ้า \vec{u} , \vec{v} และ \vec{w} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์

ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง โดยไม่ใช่เครื่องหมายวิทยาศาสตร์

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$

3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} =$

4. $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$

5. $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$

6. $\vec{0} \cdot \vec{u} =$

7. $\vec{u} \cdot \vec{u} =$

8. $\vec{i} \cdot \vec{i} =$

9. $\vec{j} \cdot \vec{j} =$

10. $\vec{k} \cdot \vec{k} =$

11. $\vec{i} \cdot \vec{j} =$

12. $\vec{i} \cdot \vec{k} =$

13. $\vec{j} \cdot \vec{k} =$