แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ การนำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

เรื่อง การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตร **เวลา 1 ชั่วโมง**

ผลการเรียนรู้

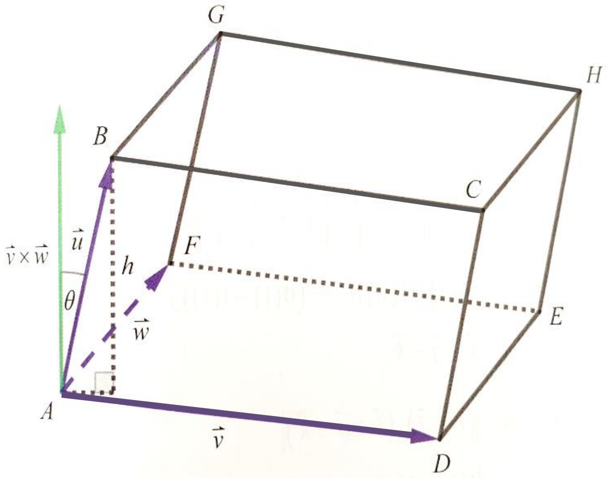
1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน *ABCDEFGH* ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}, \vec{w} = \overrightarrow{AF}$ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v} \times \vec{w}$ ในที่นี้จะพิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน *ADEF* เป็นฐาน และ h เป็นความสูง จะได้ว่า $h = |\vec{u}||cos\,\theta|$



ที่มา: หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมของสสวท. คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ฉบับปรับปรุง 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u}||cos\,\theta||\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}||cos\,\theta|$$

$$= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

(เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนลบ)

<u>หมายเหตุ</u> ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้

กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์และหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์ได้

สาระการเรียนรู้

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$\begin{aligned}|\vec{u}||\cos\theta||\vec{v}\times\vec{w}| &= |\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}||\cos\theta| \\ &= |\vec{\boldsymbol{u}}\cdot(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{w}})|\end{aligned}$$

<u>หมายเหตุ</u> ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้

กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})| = |\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้

- ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์และการใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีบทนิยามว่าอย่างไร มีวิธีหาอย่างไร

- นักเรียนและครูสรุปบทนิยามผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ ดังนี้

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3เป็นสเกลาร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ กำหนดดังนี้

ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\times\vec{v}$

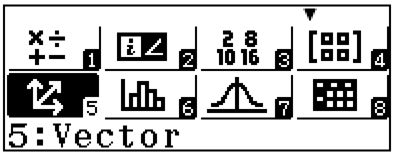
กำหนดโดย $\vec{u}\times\vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

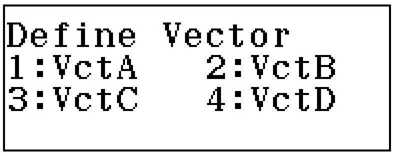
ให้ $\vec{\boldsymbol{u}}$ และ $\vec{\boldsymbol{v}}$ เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังกล่าว คือ $|\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}|$ ตารางหน่วย

2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องการหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์

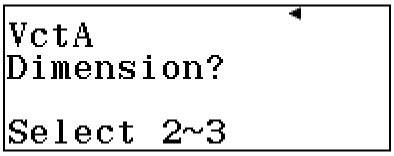
3. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม จำนวน 5 กลุ่ม โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่า $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})$ เมื่อกำหนด $\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}}$ และ $\vec{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{3\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}}$ โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.1 กดปุ่ม $\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{5}$

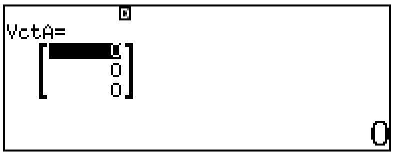




3.2 กำหนดค่า $\vec{A}$ โดยกดปุ่ม $\boxed{1}$

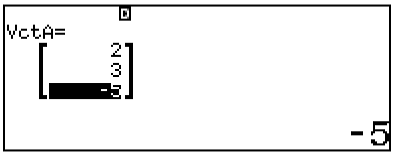


3.3 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม $\boxed{3}$



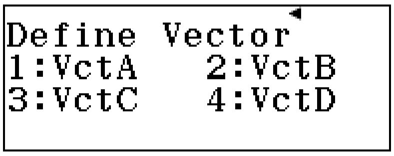
3.4 ป้อนค่า $\vec{\boldsymbol{A}} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}$ โดยกดปุ่ม

$\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

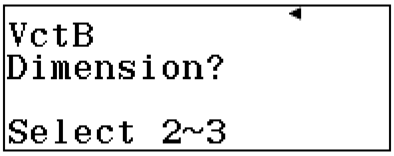


3.5 กดปุ่ม $\boxed{\text{OPTN}}$

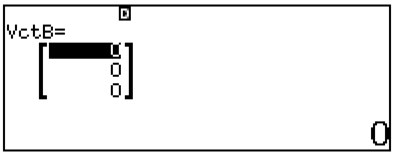
3.6 กำหนด $\vec{\boldsymbol{B}}$ โดยกดปุ่ม $\boxed{1}$



3.7 กำหนดมิติของ $\vec{\boldsymbol{B}}$ โดยกดปุ่ม $\boxed{2}$

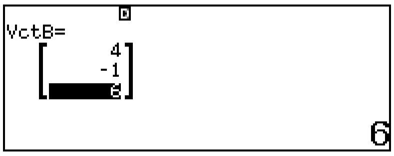


3.8 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม $\boxed{3}$

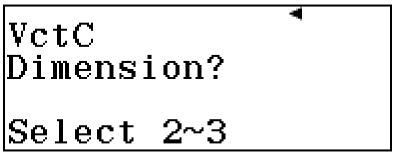


3.9 ป้อนค่า $\vec{\boldsymbol{B}} = 4\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}$ โดยกดปุ่ม

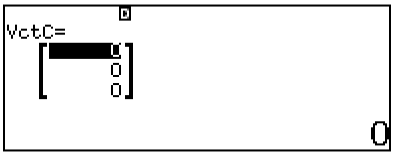
$\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$



3.10 กำหนด $\vec{C}$ โดยกดปุ่ม $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$

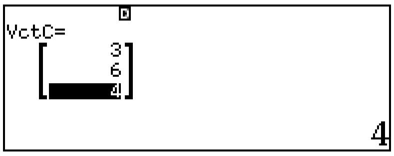


3.11 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม $\boxed{3}$

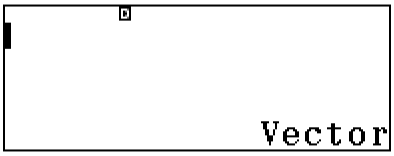


3.12 ป้อนค่า $\vec{C}=3\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$ โดยกดปุ่ม

3 = 6 = 4 =



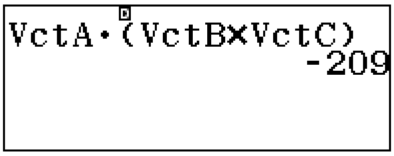
3.13 เตรียมคำนวณผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยกดปุ่ม AC



3.14 คำนวณค่า $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ ที่กำหนดไว้ออกมา

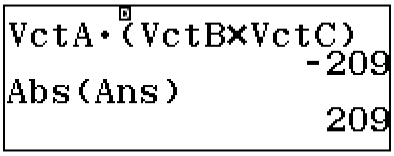
โดยกดปุ่ม OPTN 3 OPTN ▼ 2 (OPTN

4 × OPTN 5) =



3.15 คำนวณค่า $\left|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right|$ โดยกดปุ่ม

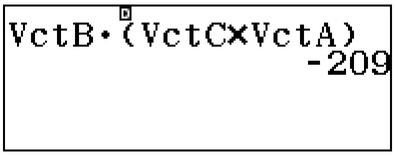
SHIFT (Ans) =



4. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อหาค่า $\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

โดยกดปุ่ม AC OPTN 4 OPTN ▼ 2

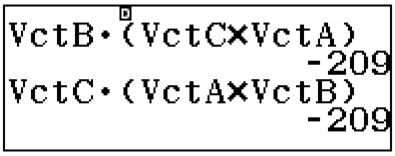
(OPTN 5 × OPTN 3) =



5. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz เพื่อหาค่า $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

โดยกดปุ่ม OPTN 5 OPTN ▼ 2

(OPTN 3 × OPTN 4) =



6. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 3.1 และ 3.2 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจ)

7. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติของการคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่งจะได้ว่า $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ (ขั้นหาความสัมพันธ์)

8. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์การหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์ตามหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันสมบัติต่างๆ ว่าเป็นจริงทุกกรณี อีกครั้งหนึ่ง

9. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปการใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรที่ได้จากการได้สำรวจ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์) จะได้ว่า

ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$$

และปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานหาได้จาก

$$\left|\bar{u}\cdot\left(\bar{v}\times\bar{w}\right)\right| = \left|\bar{v}\cdot\left(\bar{w}\times\bar{u}\right)\right| = \left|\bar{w}\cdot\left(\bar{u}\times\bar{v}\right)\right|$$

หรือ

$$\left|\bar{u}\cdot\left(\bar{w}\times\bar{v}\right)\right| = \left|\bar{v}\cdot\left(\bar{u}\times\bar{w}\right)\right| = \left|\bar{w}\cdot\left(\bar{v}\times\bar{u}\right)\right|$$

10. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่องปริมาตรเวกเตอร์ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (เมื่อทำเสร็จแล้ว ตรวจสอบโดยใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz อีกครั้งหนึ่ง)

สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 3.1 – 3.2 เรื่อง การหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์
3. แบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง ปริมาตรเวกเตอร์ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 3.1 – 3.2
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 3
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 3.1

เรื่อง การหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
1	$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=$
2	$\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$
3	$\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\right)=$
4	$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\right)=$
5	$\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)=$
6	$\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}9\\7\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-8\\11\\6\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}9\\7\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-8\\11\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}-8\\11\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}9\\7\\4\end{bmatrix}\right)=$
7	$\begin{bmatrix}11\\12\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}14\\8\\7\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}14\\8\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}11\\12\\5\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}14\\8\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}11\\12\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}\right)=$
8	$\begin{bmatrix}0.4\\1.3\\2.7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0.2\\0.5\\1.2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.3\\2.5\\1.6\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}0.2\\0.5\\1.2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0.3\\2.5\\1.6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.4\\1.3\\2.7\end{bmatrix}\right)=$	$\begin{bmatrix}0.3\\2.5\\1.6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0.4\\1.3\\2.7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.2\\0.5\\1.2\end{bmatrix}\right)=$

จาก กรณีที่ 1 กรณีที่ 2 และ กรณีที่ 3 พบว่า ถ้า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ เป็นสเกลาร์
และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}g\\h\\i\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ = ... = ...

ใบกิจกรรมที่ 3.2

เรื่อง การหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้เวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
1	$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
1	$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
2	$\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
2	$\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}-7\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
3	$\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
3	$\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$	$\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\right)=$ $\left\lvert\begin{bmatrix}7\\4\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert=$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
4	$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
4	$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}0\\5\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
5	$\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
5	$\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\12\\7\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
6	$\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =
ข้อ	กรณีที่ 4	กรณีที่ 5	กรณีที่ 6
6	$\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =	$\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\right)$ = $\left\lvert\begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}\right)\right\rvert$ =

จาก กรณีที่ 1 กรณีที่ 2 และ กรณีที่ 3 พบว่า ถ้า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ เป็นสเกลาร์
และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$$\left|\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)\right|$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$\left|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})\right|$ = ... = ...

และ จาก กรณีที่ 4 กรณีที่ 5 และ กรณีที่ 6 พบว่า ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$$\left|\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)\right|$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$\left|\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B})\right|$ = ... = ...

<u>หมายเหตุ</u> ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\left|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})\right|$ ลูกบาศก์หน่วย จะมีพื้นที่ฐานเท่ากับ $\left|(\vec{B} \times \vec{C})\right|$ ตารางหน่วย และมี $\vec{A}$ เป็นสูงเอียง

แบบฝึกทักษะที่ 3

เรื่อง ปริมาตรเวกเตอร์ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

คำชี้แจง จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน *ABCDEFGH* ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}, \vec{w} = \overrightarrow{AF}$
เมื่อกำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ดังนี้

1. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

2. $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

3. $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$ และ $\vec{w} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

4. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

5. $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{w} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$